Permutation Parity and Twisty Puzzles Solving (3)

奇偶置换与异形魔方破解（三）

Yujian Song (宋雨键)

这次主要讲讲寻找三循环的一些方法，以及一些常见的魔方局部结构。

转换机（交换子，Commutator）

转换机是构造三循环最常见的方式，它不光能用在破解异形魔方中，还能用在超高阶中心复原、最少步还原中，在盲拧中更是有着举足轻重的作用。这里主要谈一下破解中如何利用转换机构造三循环。

转换机是指形如 **A B A' B'** 的公式，可以简记为**[A, B]**，其中 **A** 和 **B** 分别代指一个魔方公式，**A'**和 **B'**分别指 **A** 和 **B** 的逆公式（即是将 **A** 中的操作逆序操作，如若 **A=R U R' F'**，则 **A'=F R U' R'**）。而在 **A** 和 **B** 影响的公共元素只有一个时，**[A, B]**就是一个三循环。

用上次提到的置换观点来看魔方，**A** 和 **B** 都可以看作是一个特定的置换。假设 **A** 和 **B** 影响的公共元素是 x，**A** 把元素 y 置换成元素 x，**B** 把元素 z 置换成元素 x。因为 z 不是 **A,B** 的公共元素，且 B 对 z 有影响，故 A 对 z 无影响，即 **A**z=z。那么就像下图这样：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\boldsymbol{A}"] & Ax \arrow[r, "\boldsymbol{B}"] & Ax \arrow[r, "\boldsymbol{A'}"] & x \arrow[r, "\boldsymbol{B'}"] & z \\ y \arrow[r] & x \arrow[r] & Bx \arrow[r] & Bx \arrow[r] & x \\ z \arrow[r] & z \arrow[r] & x \arrow[r] & y \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

可以看到 x,z,y 形成了一个轮换。而同时对于 x,y,z 以外的任意元素 w，显然 w 不能同时被 **A** 和 **B** 影响，因为我们有假设 **A** 和 **B** 影响的公共元素 x。若 w 只被 **A** 影响，由于 w≠y，所以 **A**w≠x，也即 **A**w 不受 **B** 的影响，于是**[A, B]**w=**B'**(**A'**(**B**(**A**w)))=**B'**(**A'**(**A**w))=**B'**w=w;同理若 w 只被 **B** 影响，**[A, B]**w=**B'**(**A'**(**B**(**A**w)))= **B'**(**A'**(**B**w))= **B'**(**B**w)=w；显然地若 w 既不受 **A** 影响也不被 **B** 影响，则**[A, B]**w=w。

于是我们证明了**[A, B]**=(xzy)。

值得注意的是如果 **A** 和 **B** 的公共元素不止一个，但它们的相对关系不会被 **A,B** 改变，那便可以把这些公共元素视为捆绑在一起，**[A, B]**是一些不交三循环的合成。

在这种观点下，对有色向的块用转换机，只需要随便选定块上一个面，跟踪其运动情况即可。例如盲拧 UFR378 中的 AM=**[R' D R, U']**，**R' D R** 和 **U'**影响的公共元素只有角块 ufr，而 **R' D R** 将 ldf (M)换到 ufr，**U'**将 ufl (A)换到 ufr，于是**[R' D R, U']**=(ufr ufl ldf)=(缓冲块 A M)=AM。

之前我们看到，在破解时往往需要推导一些基础三循环，而假设我们需要一个三循环(xyz)，根据以上讨论，如果能找到公式 **A** 将 x 换到 y，再找到公式 **B** 将 z 换到 y，并使得 **A**、**B** 只同时影响一个元素 y，那么就有**[A, B]**=(xyz)。

共轭（conjugate）

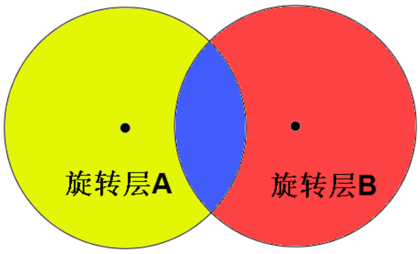
共轭即是我们常说的 set up 与 reverse 的组合，一般称形如 **B A B'**的公式为 **B** 对 **A** 的共轭，并可记为 **B: A**。

共轭在破解时往往会大量地反复地应用，我们如果不方便对每三个位置都找到一个转换机生成的三循环，那么先做一个 set up(公式 **B**)，将不方便寻找转换机的三个位置移动到已知三循环公式的位置，做三循环公式 **A**，最后再 reverse(公式 **B'**)回去，就得到了一般位置的三循环公式。这种方法比对每三个位置都推导一个转换机三循环容易得多，后者在某些时候几乎是不可能的。

常见的魔方局部结构

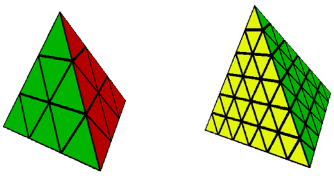
这里只举一些简单而基本的例子：

如果魔方相邻两个旋转层的交就只有一个元素，如下图所示：



则这个魔方有非常自然的转换机三循环。

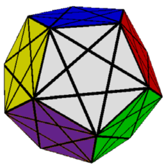
尽管这种结构十分简单，但它确实很常见，例如下面这些魔方都包含这种结构：



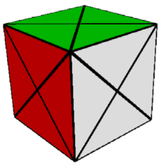
金字塔

枫叶魔方

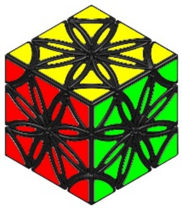
Redi



浅切转角五魔

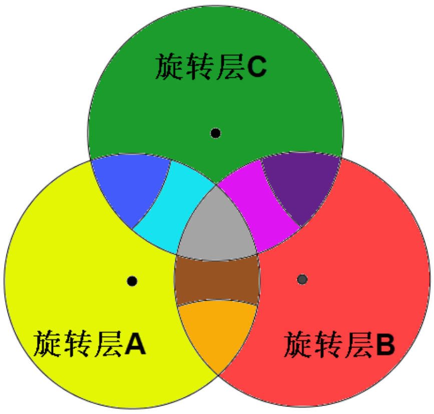


恐龙魔方



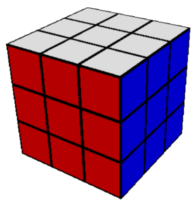
Flower Copter

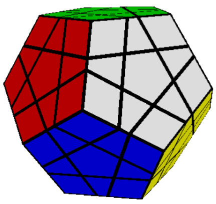
另一种结构是三个旋转层相交为如下结构：

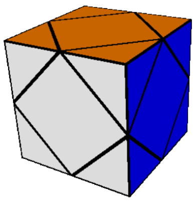


这时可以证明**(A B' A' B)3** 为两对换，具体来说，如图所示为(橙 灰)(蓝 紫)。如果这些块有色向之分，通过不同方向的两对换叠加还能得到翻色向的公式。

有这类结构的一些魔方：

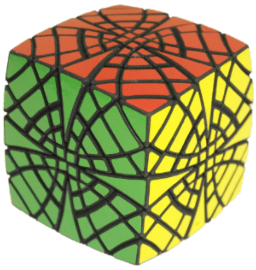

三阶魔方


三阶五魔


斜转


Hex Shaper


菱形十二面体


master curvy copter plus


天眼

完结撒花。这篇文章名字应该改成置换与魔方。